

Конечнозонные решения уравнения КдФ

Общая идея. Одно из приложений высших симметрий заключается в том, что стационарные уравнения для них определяют конечномерные редукции, совместные с базовым уравнением. Действительно, пусть дано уравнение

$$u_t = f(t, x, u, \dots, u_n), \quad (1)$$

допускающее симметрию $u_T = g(t, x, u, \dots, u_m)$. По определению, это означает, что выполнено тождество

$$D_t(g) = f_*(g) = \partial_0(f)g + \partial_1(f)D_x(g) + \dots + \partial_n(f)D_x^n(g), \quad (2)$$

где $D_t = \partial_t + \nabla_f$ — дифференцирование в силу (1). Потребуем, чтобы $u(x, t)$ удовлетворяла стационарному уравнению для симметрии, то есть ОДУ

$$g(t, x, u, \dots, u_m) = 0. \quad (3)$$

Тогда выполнены также дифференциальные следствия $D_x(g) = \dots = D_x^n(g) = 0$ и из (2) следует, что также $D_t(g) = 0$. Это означает, что дифференцирование (3) в силу (1) не даёт никаких дополнительных уравнений на u :

$$D_t(g)|_{g=0} \equiv 0.$$

Иными словами, динамика по t сохраняет уравнение (3), действует на его решениях. При этом дифференцирования D_x и D_t превращаются в пару конечномерных векторных полей, коммутатор которых равен нулю. Тогда соответствующие ОДУ имеют совместное

общее решение, что дает некоторое m -параметрическое семейство решений для исходного уравнения (1). Насколько явно решаются эти ОДУ — это уже другой вопрос, но, во всяком случае, вместо уравнения в частных производных мы имеем обыкновенные, что принципиально легче.

Упражнение. Возьмём первое попавшееся эволюционное уравнение и припишем к нему первое попавшееся ОДУ. Например,

$$u_t = u_{xx} + u^2, \quad u_{xxx} = u$$

или что-то в этом роде (напишите что-нибудь своё). Потребуем, чтобы $u(x, t)$ удовлетворяла обоим уравнениям. Тогда кроме них должны выполняться все уравнения, полученные дифференцированием по x и по t . Покажите, что полученная совокупность уравнений является (скорее всего) переопределенной: из неё можно получить в качестве следствия некоторое ОДУ более низкого порядка, чем то, что мы приписали. Вполне возможно, что даже получится какое-то противоречие, показывающее, что таких решений просто нет.

Если же мы приписываем не первое попавшееся уравнение, а стационарное уравнение для симметрии, то система не будет переопределенной. Возьмите, например, следующую пару уравнений (потенциальное уравнение Бюргерса и стационар для симметрии третьего порядка):

$$u_t = u_{xx} + u_x^2, \quad u_{xxx} + 3u_x u_{xx} + u_x^3 = 0.$$

Убедитесь, что здесь невозможно понизить порядок второго уравнения, дифференцируя его по t — то, что получается, «делится без остатка» на само уравнение.

Вполне интегрируемые динамические системы. Если у нас имеется иерархия высших симметрий $u_{t_i} = g_i[u]$, то в качестве уравнения (3) можно взять стационарное уравнение для любой их конечной линейной комбинации:

$$G = c_n g_n + \dots + c_2 g_2 + c_1 g_1 = 0. \quad (4)$$

При этом, если высшие симметрии коммутируют друг с другом, то ОДУ (4) совместно не только с базовым уравнением, но и с симметриями тоже. В результате, если порядок уравнения (4) равен N , мы получаем некоторый линейно независимый набор попарно коммутирующих N -мерных векторных полей

$$X_1, \dots, X_M, \quad [X_i, X_j] = 0, \quad i, j = 1, \dots, M,$$

одно из них которых отвечает дифференцированию по x , а остальные дифференцированию по t и другим временам. Мы видели, что коммутативность симметрий имеется для примеров уравнений КдФ и НШ, и это свойство выполняется также для многих других уравнений, если ограничиваться автономными симметриями. Однако, из бесконечной последовательности высших симметрий выживает лишь конечное число, остальные становятся линейно зависимыми.

Кроме того, обычно уравнение (4) допускает также некоторое количество функционально независимых первых интегралов, причем они сохраняются и при дифференцировании по t_i :

$$I_1, \dots, I_K, \quad X_i(I_k) = 0, \quad i = 1, \dots, M, \quad k = 1, \dots, K.$$

Если общее число симметрий и первых интегралов равно размерности системы, $M + K = N$, то она называется вполне интегрируемой. В этом случае её решение может быть, в принципе, сведено к квадратурам.

Как правило, рассматриваемые системы обладают некоторой гамильтоновой структурой, то есть, для функций от динамических переменных определена скобка Пуассона (она должна быть кососимметричной и удовлетворять тождеству Якоби)

$$\{f, g\} = \sum_{i,j} J^{ij} \partial_i(f) \partial_j(g),$$

относительно которой первые интегралы инволютивны, а векторные поля гамильтоновы:

$$\{I_i, I_j\} = 0, \quad i, j = 1, \dots, K; \quad X_i(u_n) = \{I_i, u_n\}, \quad i = 1, \dots, M.$$

Тогда из $\{I_i, I_j\} = 0$ следует $[X_i, X_j] = 0$. При этом может быть $M < K$, так как $r = K - M$ первых интегралов могут аннулировать скобку Пуассона тождественно (так называемые функции Казимира). Если $2M + r = N$, где N размерность системы, то система называется интегрируемой по Лиувиллю. В этом случае можно перейти к переменным типа действие-угол, где одна половина переменных является первыми интегралами, а вторая линейно зависит от переменных t_i . При некоторых дополнительных предположениях, теорема Лиувилля–Арнольда утверждает, что если поверхность уровня первых интегралов компактна, то она диффеоморфна M -мерному тору, а динамика в силу любой из симметрий представляет собой его прямолинейную обмотку.

Следует отметить, что доказательство интегрируемости по Лиувиллю в каждом конкретном случае (то есть, поиск гамильтоновой структуры, подсчёт числа первых интегралов, доказательство их функциональной независимости и инволютивности) может оказаться довольно трудной задачей, не говоря о фактическом интегрировании и анализе типов поверхностей уровня первых интегралов. Тем не менее, это работает. Как правило, при решении этих задач существенно используются представления Лакса.

Случай уравнения КдФ. Перейдем к нашему излюбленному примеру

$$u_{t_3} = u_3 + 6uu_1. \quad (5)$$

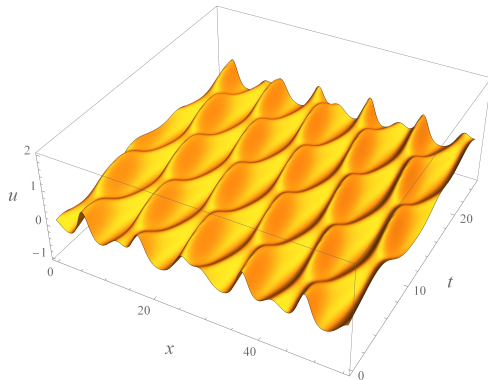
Фактически, мы уже рассматривали для него редукции вида (3). Действительно, на второй лекции мы строили решения в виде бегущей волны, что равносильно стационарному уравнению для линейной комбинации первых двух потоков:

$$u_{t_3} + c_1 u_{t_1} = u_3 + 6uu_1 + c_1 u_1 = D_x(u_2 + 3u^2 + c_1 u) = 0 \quad (6)$$

(см. файл `02_KdV travelling wave solution.nb`). В следующем по сложности случае получаем уравнение вида

$$u_{t_5} + c_1 u_{t_3} + c_2 u_{t_1} = D_x(u_4 + 10uu_2 + 5u_1^2 + 10u^3 + c_1(u_2 + 3u^2) + c_2 u) = 0,$$

которое мы решали численно (см. файл `01_Commuting vector fields.nb`).



Теперь мы понимаем, откуда взялся этот пример, и можем его обобщить, рассматривая высшие симметрии, полученные на предыдущей лекции:

$$u_{t_{2n+1}} = D_x(A_{n+1}) = R^n(u_1), \quad R = D_x^2 + 4u + 2u_1 D_x^{-1}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Рассмотрим стационарное уравнение для линейной комбинации этих симметрий. Так как в их правых частях стоят полные производные, то после однократного интегрирования получается ОДУ порядка $2n$

$$A_{n+1} + c_1 A_n + \dots + c_n A_1 + c_{n+1} A_0 = 0, \quad (7)$$

где $A_0 = 1/2$, которое называется уравнением Новикова.

Напомним, что при $n = 1$ нам удалось понизить порядок уравнения (6) до 1, причем общее решение нашлось в эллиптических функциях, а в вырожденном случае получилось солитонное решение. Нечто подобное можно проделать и для уравнения (7) произвольного порядка. Оказывается, что вместо эллиптических функций здесь возникают так называемые конечнозонные потенциалы. Их теория довольно сложна и мы наметим лишь общую схему их построения.

Утверждение. Уравнение (7) эквивалентно следующему условию: уравнение

$$2gg_{xx} - g_x^2 + (4u - \zeta)g^2 = -P(\zeta) = \text{const}, \quad (8)$$

допускает решение g в виде многочлена степени n (при этом $P(\zeta)$ также многочлен):

$$g = \zeta^n + G_1 \zeta^{n-1} + \dots + G_n, \quad P(\zeta) = \zeta^{2n+1} + p_1 \zeta^{2n} + \dots + p_{2n+1}.$$

◀ Сначала покажем, что (7) эквивалентно существованию полиномиального решения для уравнения

$$g_{xxx} + (4u - \zeta)g_x + 2u_xg = 0. \quad (9)$$

Напомним, что этому уравнению удовлетворяет производящая функция для A_j

$$a = A_0 + A_1/\zeta + A_2/\zeta^2 + \dots, \quad \zeta = -4\lambda.$$

Уравнение (7) означает, что существует ряд $c = \zeta^n + c_1\zeta^{n-1} + c_2\zeta^{n-2} + \dots$ с постоянными коэффициентами, такой, что произведение $g = ac$ есть многочлен. Действительно, коэффициент при ζ^{-1} обращается в 0 в силу (7), а коэффициенты при следующих отрицательных степенях обращаются в 0 в силу следствий из (7), получающихся в результате применения оператора $D_x^{-1}RD_x$, с подходящими постоянными интегрирования.

Далее, как мы уже знаем, уравнение (9) можно один раз проинтегрировать, умножив на $2g$ (ранее мы использовали это для доказательства того, что все A_j находятся в локальном виде). Это и даёт уравнение (8) с некоторым постоянным многочленом в правой части (если в качестве A_j выбираются однородные многочлены, то $c = \sqrt{P/\zeta}$). ▶

Замечание. Напомним, что при построении n -солитонных решений (потенциалов Баргманна) требовалась полиномиальность ψ -функций уравнения Шредингера по $z = \sqrt{-\lambda}$, с точностью до множителя e^{zX} . Произведение двух ψ -функций удовлетворяет уравнению (9), поэтому в качестве g можно взять $g = \psi(z)\psi(-z)$. Для n -солитонного решения это будет, очевидно, многочлен по ζ степени n . Следовательно, n -солитонные решения удовлетворяют уравнению Новикова (7). Обратное неверно — не все решения (7) являются n -солитонными. Это лишь подкласс специальных, сепаратрисных решений, выделенных условием быстроубывания. Для общего решения условие полиномиальности ψ -функций не выполняется.

Уравнения Дубровина. На первый взгляд, уравнение (8) ничуть не проще (7), но тут помогает переход к корням многочленов g и P . Пусть

$$g(\zeta) = (\zeta - y_1) \dots (\zeta - y_n), \quad P(\zeta) = (\zeta - e_1) \dots (\zeta - e_{2n+1}).$$

Если теперь в (8) положить $\zeta = y_j$, то первое и третье слагаемое обратятся в 0 и в результате мы получим следующую систему ОДУ на переменные y_j :

$$g_x^2|_{\zeta=y_j} = P(y_j), \quad j = 1, \dots, n.$$

Так как $g_x|_{\zeta=y_j} = -y_{j,x} \prod_{i \neq j} (y_j - y_i)$, то эти уравнения эквивалентны системе Дубровина

$$\frac{y_{j,x}}{\sqrt{P(y_j)}} = \frac{1}{\prod_{i \neq j} (y_j - y_i)}. \quad j = 1, \dots, n, \quad (10)$$

Таким образом, уравнение (7) порядка $2n$ сведено к системе порядка n . При этом исходное уравнение содержало $n + 1$ постоянную $c_1, \dots, c_{n+1}$, а система (10) содержит $2n + 1$ постоянную $e_1, \dots, e_{2n+1}$, как и должно быть; то есть, мы ничего не потеряли при замене. Фактически, понижение порядка происходит при переходе от уравнения (9) к (8).

Кроме системы по x , можно выписать системы, определяющие динамику по другим временам ($x = t_1$):

$$\frac{y_{j,t_{2k+1}}}{\sqrt{P(y_j)}} = \frac{a^{(k)}(y_j)}{\prod_{i \neq j} (y_j - y_i)}, \quad j = 1, \dots, n, \quad a^{(k)}(\zeta) = A_0 \zeta^k + A_1 \zeta^{k-1} + \dots + A_k, \quad (11)$$

где $k = 0, \dots, n - 1$ (дифференцирования по t_{2n+1} и старшим временам, естественно, являются их линейными комбинациями). Эти системы коммутируют с системой (10) и друг с другом.

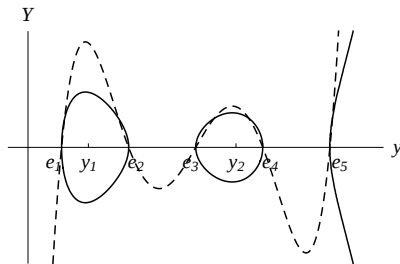
Возникает вопрос, как получить решение исходного уравнения, то есть, функцию $u(x)$ по решению системы (10). Это несложно: коэффициент при ζ^{2n} в уравнении (8) дает соотношение $-4u + 2G_1 = p_1$, что эквивалентно

$$4u = e_1 + \dots + e_{2n+1} - 2(y_1 + \dots + y_n). \quad (12)$$

Рассмотрим качественное поведение решения, в предположении, что все корни e_k различны и вещественны; для определённости, пусть

$$e_1 < e_2 < \dots < e_{2n+1}.$$

Тогда, для того чтобы решение системы было вещественным, нужно, чтобы все переменные y_j лежали в тех интервалах, где $P(y) \geq 0$, то есть, $[e_{2k-1}, e_{2k}]$, $k = 1, \dots, n$, или $[e_{2n+1}, \infty)$.



На рисунке сплошной линией показана кривая $Y^2 = P(y)$, а штриховой сам многочлен $Y = P(y)$. При этом, если y_i и y_j попадут в один интервал, то в решении возникнет особенность из-за знаменателя $y_i - y_j$ в правой части (10). Также, решение будет неограниченным, если какая-то переменная лежит в интервале $[e_{2n+1}, \infty)$. Таким образом, для

вещественности и ограниченности решения следует задавать начальные условия для y_j так:

$$e_1 \leq y_1 \leq e_2 < e_3 \leq y_2 \leq e_4 < \dots < e_{2n-1} \leq y_n \leq e_{2n} < e_{2n+1}.$$

В этом случае переменные y_j отделены друг от друга и никаких особенностей в системе (10) возникнуть не может. Переменные y_j будут крутиться каждая в своей клетке, поэтому из формулы (12) ясно, что решение будет представлять собой квазипериодическую функцию по x . Случай, когда все пары корней e_{2k} и e_{2k+1} сливаются, отвечает n -солитонному вырождению.

Дальнейшее интегрирование системы Дубровина требует высшей математики. Приведем лишь некоторые ключевые слова. Уравнение $Y^2 = P(y)$ определяет гиперэллиптическую кривую $\eta = (y, Y)$. На соответствующей римановой поверхности рассматриваются абелевы дифференциалы $\omega_s(y) = \frac{y^s dy}{\sqrt{P(y)}}$, $s = 0, \dots, n-1$. Можно показать, довольно громоздкими, но чисто алгебраическими вычислениями, что из (11) следуют соотношения вида

$$\sum_{j=1}^n \omega_s(y_j) = \sum_{j=1}^n \frac{y_j^s dy_j}{\sqrt{P(y_j)}} = \sum_{k=1}^n M_{sk} dt_{2k-1}, \quad s = 0, \dots, n-1,$$

где M_{sk} некоторые постоянные (выражающиеся через e_j). Тогда, интегрируя между фиксированной точкой η_0 и точками η_j на римановой поверхности, получаем равенства

$$\theta_s(\eta_1, \dots, \eta_n) := \sum_{j=1}^n \int_{\eta_0}^{\eta_j} \omega_s(y_j) = \sum_{k=1}^n M_{sk} t_{2k-1}, \quad s = 0, \dots, n-1.$$

В левой части написаны какие-то трансцендентные функции от точек η_j , причем их значения определены с точностью до добавления интегралов по циклам на римановой по-

верхности, так что пространство, где живут θ_s — это n -мерный тор. В правой же части написаны просто какие-то линейные функции от времен — фазы, определяющие прямолинейную обмотку на торах. Остаётся «всего ничего» — разрешить эти уравнения и выразить из них η_j как функции от фаз (после чего формула (12) даёт искомое решение u). Это так называемая задача обращения Якоби, являющаяся многомерным обобщением задачи обращения эллиптических интегралов. Она эффективно решается, ответ даёт называемой римановой тэта-функцией, но мы опустим дальнейшие формулы. Качественный вывод заключается в том, что (регулярные) решения уравнения (7) являются n -фазными квазипериодическими функциями.

-
- [1] С.П. Новиков. Периодическая задача для уравнения Кортевега–де Фриза. I. *Функц. анализ и его прил.* **8:3** (1974) [54–66](#).
- [2] Б.А. Дубровин. Периодическая задача для уравнения Кортевега–де Фриза в классе конечнорезонантных потенциалов. *Функц. анализ и его прил.* **9:3** (1975) [41–51](#).
- [3] В.Е. Захаров, С.В. Манаков, С.П. Новиков, Л.П. Питаевский. Теория солитонов. Метод обратной задачи, М.: Наука, 1980. (Глава II)
- [4] А. Ньюэлл. Солитоны в математике и физике. М.: Мир, 1989. (стр. 145–158)